SEMINARIO DI ANALISI MATEMATICA
DIPARTIMENTO DI MATEMATICA
DELL'UNIVERSITA' DI BOLOGNA
Anno Accademico 2000-2001

Angelo Favini

PROBLEMI DI IDENTIFICAZIONE PER EQUAZIONI INTEGRO-DIFFERENZIALI DI TIPO PARABOLICO

20 marzo 2001

Tecnoprint - Bologna 2001

Sunto.

Si identificano i nuclei incogniti, dipendenti solo dal tempo, in certe equazioni integro-differenziali singolari in spazi di Banach. Si danno teoremi di esistenza ed unicitá sia di tipo locale nel tempo che di tipo globale. Vengono descritte alcune applicazioni ad equazioni integro-differenziali degeneri alle derivate parziali.

Summary.

We recover unknown kernels, depending on time only, in linear singular first-order integro-differential Cauchy problems in Banach spaces. Singular means here that the integro-differential equation is not in normal form neither can it be reduced to such a form. For this class of problems we prove some existence and uniqueness theorems, both of local type in time and of global type. We indicate a few applications to explicit degenerate partial integro-differential equations of parabolic type.

1 Introduzione

Sia X uno spazio di Banach (complesso), con norma $\|\cdot\|$ e siano A, B operatori lineari di X in sé, chiusi, con $-A$ generatore infinitesimale di un semigruppo analitico in X, e dominio $\mathcal{D}(A) \subseteq \mathcal{D}(B)$. Dati $f \in C^{\theta}([0,\tau];X)$, $0 < \theta < 1$, $g \in C^2([0,\tau])$, $u_0 \in \mathcal{D}(A)$, $\Phi \in X^*$, lo spazio duale di X, un problema di grande interesse e rilevante per le numerosissime applicazioni concrete ad equazioni alle derivate parziali é il seguente : trovare $u \in C([0,\tau];\mathcal{D}(A))$ e $k \in C([0,\tau])$ (per esempio) tali che

$$u'(t) + Au(t) = \int_0^t k(t-s)Bu(s)ds + f(t), \quad 0 \le t \le \tau, \tag{1.1}$$

$$u(0) = u_0, \tag{1.2}$$

conoscendo l'informazione aggiuntiva

$$\Phi[u(t)] = g(t), \quad 0 \le t \le \tau. \tag{1.3}$$

Si tratta, cioé di riscoprire k (e u) dalla conoscenza che u soddisfa (1.3).
Naturalmente, ci dobbiamo aspettare che i dati soddisfino condizioni di compatibilitá a $t = 0$, cioé

$$\Phi[u_0] = g(0), \quad \Phi[f(0) - Au_0] = g'(0).$$

(Cf. Lorenzi [L1]).
Vari autori hanno giá considerato il problema analogo a (1.1)~(1.3) per equazioni degeneri del tipo

$$Mu'(t) + Lu(t) = \int_0^t k(t-s)L_1u(s)ds + f(t), \quad 0 \le t \le \tau, \tag{1.4}$$

con l'informazione su $Mu(t)$ data da

$$\Phi[Mu(t)] = g(t) \quad \forall t \in [0,\tau]. \tag{1.5}$$

Ci limitiamo a ricordare che problemi di identificazione per certe equazioni integro-differenziali pseudo-paraboliche sono stati studiati da Asanov e Atamanov [AA], Lorenzi [L2], Lorenzi e Paparoni [LP], per esempio.
In questo seminario esporró alcuni risultati relativi ad (1.2), (1.4), (1.5) in situazioni molto piú generali di quelle analizzate precedentemente. Agli operatori M, L si richiede che soddisfino la stima risolvente

$$\|M(\lambda M + L)^{-1}\| \le C(1 + |\lambda|)^{-1} \tag{1.6}$$

per ogni λ nel settore

$$\Sigma = \{\lambda \in C : \Re e\lambda \ge -c(1 + |\Im m\lambda|)\}, \quad c > 0. \tag{1.7}$$

Dunque, in particolare, L ha inverso limitato.
L'ipotesi (1.6) consente di applicare al problema (1.2), (1.4) le tecniche di Favini e Yagi [FY]. Supponiamo in ogni caso $\mathcal{D}(L) \subseteq \mathcal{D}(M)$ e che L_1 abbia dominio $\mathcal{D}(L_1) \supseteq \mathcal{D}(L)$. Naturalmente, si assume che tutti gli operatori siano chiusi.

Inizialmente tratteremo il caso in cui $\lambda = 0$ é un polo semplice per $(\lambda + T)^{-1}$, dove

$$T = ML^{-1} \in \mathcal{L}(X); \tag{1.8}$$

Allora (1.6) é verificata per tutti i λ complessi con valore assoluto abbastanza grande.
Il nostro scopo é quello di ricondurre la soluzione del problema di identificazione (1.2), (1.4), (1.5) ad uno relativo ad equazione *non* degenere. A tal fine sfrutteremo la rappresentazione in somma diretta di X:

$$X = \mathcal{N}(T) \oplus \mathcal{R}(T), \tag{1.9}$$

dove $\mathcal{N}(T)$ é il nucleo di T e $\mathcal{R}(T)$, immagine di T, é un sottospazio chiuso di X. Si noti che $\tilde{T}$, restrizione di T a $\mathcal{R}(T)$, ha inverso limitato.

Per quanto riguarda il caso generale (1.6), faremo l'ipotesi supplementare che X sia riflessivo, cosicché si abbia la rappresentazione

$$X = \mathcal{N}(T) \oplus \overline{\mathcal{R}(T)}, \tag{1.10}$$

dove $\overline{\mathcal{R}(T)}$ denota la chiusura di $\mathcal{R}(T)$ nella topologia di X. Questa parte andrá trattata con molta cura, perché $-\tilde{T}^{-1}$ non é limitato, anche se genera un semigruppo analitico in $\overline{\mathcal{R}(T)}$.

2 Un problema di identificazione

Chiariamo le tecniche che sono alla base della trattazione.
Supponiamo che $(u,k) \in C^1([0,\tau]; \mathcal{D}(L)) \times C([0,\tau])$ sia una soluzione stretta di (1.2), (1.4), (1.5). Poniamo

$$v(t) = u'(t) \quad \text{se e solo se} \quad u(t) = u_0 + \int_0^t v(s)ds. \tag{2.1}$$

Allora la coppia $(v,k) \in C([0,\tau]; \mathcal{D}(L)) \times C([0,\tau])$ soddisfa il problema di identificazione

$$\frac{d}{dt}(Mv(t)) + Lv(t) = k(t)L_1u_0 + \int_0^t k(t-s)L_1v(s)ds + f'(t), \quad 0 \le t \le \tau, \tag{2.2}$$

$$Mv(0) = f(0) - Lu_0, \tag{2.3}$$

$$\Phi[Mv(t)] = g'(t), \quad \forall t \in [0,\tau]. \tag{2.4}$$

Inversamente, se $(v,k) \in C([0,\tau]; \mathcal{D}(L)) \times C([0,\tau])$, con $Mv \in C^1([0,\tau]; X)$ risolve (2.2)~(2.4), in virtú della (2.1), deduciamo che $(u,k) \in C^1([0,\tau]; \mathcal{D}(L)) \times C([0,\tau])$, $Mu' \in C^1([0,\tau]; X)$, soddisfa l'equazione

$$Mu'(t) + Lu(t) = (\int_0^t k(s)ds)L_1u_0$$
$$+ \int_0^t d\tau \int_0^\tau k(t-s)L_1u'(s)ds + f(t), \quad 0 \le t \le \tau. \tag{2.5}$$

Applicando il Teorema di Fubini a (2.5) vediamo che

$$Mu'(t) + Lu(t) = [\int_0^t k(s)ds]L_1u_0 + f(t) + \int_0^t k(s)ds \int_s^t L_1u'(\tau - s)d\tau$$

$$= [\int_0^t k(s)ds]L_1u_0 + f(t) + \int_0^t k(s)L_1[u(t-s) - u_0]ds$$

$$= \int_0^t k(t-s)L_1u(s)ds + f(t), \quad 0 \le t \le \tau.$$

Cosí, la coppia (u, k) risolve (1.4), (1.2).

Inoltre, poiché

$$\Phi[Mv(t)] = \Phi[Mu'(t)] = \frac{d}{dt}\Phi[Mu(t)],$$

se teniamo conto della condizione di compatibilitá

$$\Phi[Mu_0] = g(0), \quad \Phi[f(0) - Lu_0] = g'(0), \tag{2.6}$$

si ottiene

$$\Phi[Mu(t)] - g(t) = \Phi[Mu_0] - g(0) = 0 \quad \forall t \in [0, \tau].$$

Pertanto, abbiamo visto che i problemi di identificazione (1.4), (1.2), (1.5) e (2.1)~(2.4) sono equivalenti se si cercano le soluzioni in $C^1([0,\tau]; \mathcal{D}(L)) \times C([0,\tau])$ e in $C([0,\tau]; \mathcal{D}(L)) \times C([0,\tau])$, rispettivamente.

Tale approccio é completamente soddisfacente per il caso del polo semplice. Andrá leggermente modificato per trattare la situazione generale (1.6).

3 Il caso del polo semplice

Sia $\lambda = 0$ polo semplice di $\lambda \to (\lambda I + T)^{-1} = L(\lambda L + M)^{-1}$. Denotiamo con P la proiezione di X su $\mathcal{N}(T)$ lungo $\mathcal{R}(T)$ associata alla rappresentazione (1.9).
Il cambiamento di variabile

$$w(t) = Lv(t)(\Leftrightarrow v(t) = L^{-1}w(t)) \tag{3.1}$$

trasforma il problema di identificazione (2.2)~(2.4) nel seguente : determinare una coppia $(w, k) \in C([0,\tau]; X) \times C([0,\tau])$ tale che $Tw \in C^1([0,\tau]; X)$ e valgano

$$\frac{d}{dt}(Tw(t)) + w(t) = k(t)L_1u_0 + \int_0^t k(t-s)L_1L^{-1}w(s)ds + f'(t), \quad 0 \le t \le \tau, \tag{3.2}$$

$$Tw(0) = f(0) - Lu_0, \tag{3.3}$$

$$\Phi[Tw(t)] = g'(t), \; 0 \le t \le \tau. \tag{3.4}$$

Risolviamo dunque (3.2)~(3.4). A tal fine, faremo le sequenti ipotesi :

$$\mathcal{N}(T) \text{ é invariante sotto } L_1 L^{-1}, \tag{3.5}$$

$$f(0) - Lu_0 \in \mathcal{R}(T), \tag{3.6}$$

$$\Phi[(1-P)L_1 u_0] \neq 0. \tag{3.7}$$

Osservazione 1. Se $L_1 = aL$, con $a \neq 0$, la (3.5) é banalmente soddisfatta.

Il primo nostro risultato, ottenuto nel lavoro in collaborazione con Alfredo Lorenzi [FL], é il seguente.

Teorema 3.1. *Sia $z = 0$ un polo semplice per $L(zL + M)^{-1}$, con L, L_1, M operatori lineari chiusi in X tali che $\mathcal{D}(L) \subseteq \mathcal{D}(L_1) \cap \mathcal{D}(M)$, $0 \in \rho(L)$. Sia inoltre*

$$\Phi \in X^*, \quad f \in C^1([0,\tau];X), \quad g \in C^2([0,\tau]), \quad u_0 \in \mathcal{D}(L), \tag{3.8}$$

e valgano (3.5)~(3.7) insieme alle condizioni di consistenza (2.6).
Allora il problema (1.2), (1.4), (1.5) ha una unica soluzione $(u,k) \in C^1([0,\tau];\mathcal{D}(L)) \times C([0,\tau])$ tale che $Mu' \in C^1([0,\tau] : X)$.

Dimostrazione. Tenendo conto della assunzione (3.5), il sistema (3.2)~(3.4) diventa

$$\frac{d}{dt}(\tilde{T}(1-P)w(t)) + (1-P)w(t) = k(t)(1-P)L_1 u_0$$

$$+ \int_0^t k(t-s)(1-P)L_1 L^{-1}(1-P)w(s)ds + (1-P)f'(t), \quad 0 \leq t \leq \tau, \tag{3.9}$$

$$\tilde{T}(1-P)w(0) = f(0) - Lu_0, \quad (= (1-P)[f(0) - Lu_0] \text{ per } (3.6)), \tag{3.10}$$

$$\Phi[\tilde{T}(1-P)w(t)] = g'(t), \quad 0 \leq t \leq \tau, \tag{3.11}$$

$$Pw(t) = k(t)PL_1 u_0 + \int_0^t k(t-s)PL_1 L^{-1}w(s)ds + Pf'(t), \quad 0 \leq t \leq \tau. \tag{3.12}$$

Osserviamo che il problema di identificazione (3.9)~(3.11) contiene solo le incognite $((1-P)w, k)$. Introducendo la nuova incognita

$$z(t) = \tilde{T}(1-P)w(t) \quad (\Leftrightarrow (1-P)w(t) = \tilde{T}^{-1}z(t)),$$

il problema (3.9)~(3.11) diventa

$$z'(t) + \tilde{T}^{-1}z(t) = \quad k(t)(1-P)L_1 u_0 + \int_0^t k(t-s)(1-P)L_1 L^{-1}\tilde{T}^{-1}z(s)ds$$

$$+(1-P)f'(t), \quad 0 \leq t \leq \tau, \tag{3.13}$$

$$z(0) = f(0) - Lu_0, \tag{3.14}$$

$$\Phi[z(t)] = g'(t), \quad 0 \leq t \leq \tau. \tag{3.15}$$

Si noti che $\tilde{T}^{-1}$ é un operatore limitato da $\mathcal{R}(\tilde{T}) = \mathcal{R}(T)$ in sé.

Consideriamo allora il seguente problema inverso nello spazio di Banach $\mathcal{R}(T)$, che denoteremo Y, per brevitá:

$$y'(t) + \tilde{T}^{-1}y(t) = \int_0^t k(t-s)(1-P)L_1L^{-1}\tilde{T}^{-1}y(s)ds$$

$$+(1-P)f(t), \quad 0 \le t \le \tau, \tag{3.16}$$

$$y(0) = Mu_0 = TLu_0 = \tilde{T}(1-P)Lu_0, \tag{3.17}$$

$$\Phi[y(t)] = g(t), \quad 0 \le t \le \tau. \tag{3.18}$$

Allora $z = y'$ soddisfa

$$z'(t) + \tilde{T}^{-1}z(t) = k(t)(1-P)L_1L^{-1}\tilde{T}^{-1}y(0)$$

$$+\int_0^t k(t-s)(1-P)L_1L^{-1}\tilde{T}^{-1}z(s)ds + (1-P)f'(t), \quad 0 \le t \le \tau.$$

In forza di (3.5) si ha $(1-P)L_1L^{-1}PLu_0 = 0$, cosicché

$$k(t)(1-P)L_1L^{-1}\tilde{T}^{-1}y(0) = k(t)(1-P)L_1L^{-1}(1-P)Lu_0$$

$$= k(t)(1-P)L_1L^{-1}[(1-P)Lu_0 + PLu_0] = k(t)(1-P)L_1u_0. \tag{3.19}$$

Pertanto, $z(\cdot)$ soddisfa (3.13) e, in forza della (3.6),

$$z(0) = (1-P)f(0) - \tilde{T}^{-1}y(0) = (1-P)[f(0) - Lu_0]$$

$$= f(0) - Lu_0.$$

Inoltre,

$$\Phi[z(t)] = \Phi[y'(t)] = \frac{d}{dt}\Phi[y(t)] = g'(t), \quad 0 \le t \le \tau.$$

Ma allora $z(\cdot)$ é proprio l'unica soluzione di (3.13)~(3.15). Possiamo dunque applicare al problema (3.13)~(3.15) i risultati di Lorenzi e Paparoni [LP, Sezione 2]. Pertanto, tale problema ammette una unica soluzione $(z,k) \in W^{1,p}((0,\tau);\mathcal{R}(T)) \times L^p((0,\tau))$ per ogni $p \in (1,+\infty)$.

D'altra parte, se denotiamo con χ il numero

$$\chi = (\Phi[(1-P)L_1u_0])^{-1}, \tag{3.20}$$

dalle assunzioni (3.5)~(3.7) e dall'equazione (3.15) si trova che (cf. Lorenzi e Paparoni [LP])

$$k(t) = \chi\{g"(t) - \Phi[(1-P)f'(t)]\} + \chi\Phi[\tilde{T}^{-1}z(t)]$$

$$-\chi\int_0^t k(s)\Phi[(1-P)L_1L^{-1}\tilde{T}^{-1}z(t-s)]ds, \quad 0 \le t \le \tau, \tag{3.21}$$

e quindi k é continua su $[0,\tau]$. Pertanto la soluzione $z(\cdot)$ del problema di Cauchy (3.13), (3.14) appartiene a $C^1([0,\tau];\mathcal{R}(T))$. Segue che $(1-P)w(t) = \tilde{T}^{-1}z(t)$ é il primo elemento della coppia $C([0,\tau];\mathcal{R}(T)) \times C([0,\tau])$ che soddisfa (3.9)~(3.11).
Resta ora da trovare una unica funzione Pw dalla (3.12). Poiché il nucleo $k(\cdot)$ ed il membro a destra

$$h(t) = \int_0^t k(t-s)PL_1L^{-1}(1-P)w(s)ds + k(t)PL_1u_0 + Pf'(t), \quad 0 \le t \le \tau, \tag{3.22}$$

sono ora conosciuti, la (3.12) puó essere scritta nella forma integrale

$$Pw(t) - \int_0^t k(t-s)PL_1L^{-1}Pw(s)ds = h(t), \quad 0 \le t \le \tau. \tag{3.23}$$

L'operatore integrale

$$(Kw)(t) = \int_0^t k(t-s)PL_1L^{-1}Pw(s)ds, \quad 0 \le t \le \tau, \tag{3.24}$$

é limitato da $C([0,\tau];\mathcal{N}(T))$ in sé e ha raggio spettrale uguale a zero. Cosí l'equazione integrale (3.23) ammette una unica soluzione $Pw \in C([0,\tau];\mathcal{N}(T))$. #

Osservazione 3.2. Se $L^{-1}L_1$ ha una estensione limitata $\overline{L^{-1}L_1}$ che commuta con M, allora l'assunzione (3.5) é soddisfatta ; infatti, se $u \in \mathcal{N}(T)$, cioé $ML^{-1}u = 0$, allora

$$ML^{-1}L_1L^{-1}u = M\overline{L^{-1}L_1}L^{-1}u = \overline{L^{-1}L_1}ML^{-1}u = 0.$$

Analogamente, se $T = ML^{-1}$ e L_1L^{-1} commutano, di nuovo la (3.5) é soddisfatta. Se, poi, M stesso commta con L e L_1, tenendo conto che $X = \mathcal{N}(M) \oplus \mathcal{R}(M)$, si vede facilmente che i nostri argomenti possono essere nuovamente adattati.

4 Il caso parabolico

Studieremo la risolubilitá locale del problema di identificazione (1.2), (1.4), (1.5) sotto la condizione (1.6), X essendo uno spazio di Banach riflessivo.

Per brevitá, porremo $\overline{\mathcal{R}(T)}$ (con la topologia indotta da quella di X) $= Y$. Indicheremo ancora con P l'operatore di proiezione su $\mathcal{N}(T)$ lungo Y.

Prima di tutto osserviamo che l'operatore $(1-P)L_1L^{-1}\tilde{T}^{-1}$ é densamente definito in Y ma puó non essere chiuso. Questa é una ipotesi aggiuntiva che dobbiamo fare, cioé

$$(1-P)L_1L^{-1}\tilde{T}^{-1}\underline{\text{é un operatore chiuso da Y in sé.}} \tag{4.1}$$

Abbiamo giá ricordato che, in virtú di (1.6), $-\tilde{T}^{-1}$ genera un semigruppo analitico su Y. Adottando le notazione della Sezione 3, sappiamo, cf. Lorenzi e Sinestrari [LS], Theorem 4.1, che il problema (3.16)~(3.18) ha una unica soluzione stretta locale (y,k), nel senso che (3.16) e (3.18) valgono su un opportuno intervallo $[0,\tau_1] \subseteq [0,\tau]$,

$$y \in C^1([0,\tau_1];\mathcal{D}(\tilde{T}^{-1})) \cap C^2([0,\tau_1];Y), \tag{4.2}$$

$$t^{1-\alpha}k \in C^\beta([0,\tau_1]), \tag{4.3}$$

dove

$$\alpha, \beta \in (0,1), \quad \beta \leq \min(\alpha, 1-\alpha) \tag{4.4}$$

sono fissati, purché

$$(1-P)f \in C^{1+\beta}([0,\tau_1];Y), \tag{4.5}$$

$$\tilde{T}(1-P)Lu_0, \quad (1-P)L_1L^{-1}(1-P)Lu_0, \quad (1-P)[f(0)-Lu_0] \in \mathcal{R}(T), \tag{4.6}$$

$$(1-P)f'(0) - \tilde{T}^{-1}\{(1-P)[f(0)-Lu_0]\} \in \mathcal{D}_{-\tilde{T}^{-1}}(\beta, +\infty), \tag{4.7}$$

$$g \in C^1([0,\tau]) \cap C^2((0,\tau]), \quad t^{1-\alpha}g'' \in C^{\beta}([0,\tau]), \tag{4.8}$$

$$g(0) = \Phi[Mu_0], \quad g'(0) = \Phi[(1-P)(f(0)-Lu_0)], \tag{4.9}$$

$$\Phi[(1-P)L_1L^{-1}(1-P)Lu_0] \neq 0. \tag{4.10}$$

Ora, sotto l'assunzione (3.5), la (4.10) si riduce alla (3.7). Pertanto, se

$$L_1u_0 \in \mathcal{R}(T), \tag{4.11}$$

la (4.10) diventa $\Phi[L_1u_0] \neq 0$. Poiché (3.5) implica che

$$(1-P)L_1L^{-1}(1-P)Lu_0 = (1-P)L_1L^{-1}Lu_0 = (1-P)L_1u_0,$$

che appartiene a $\mathcal{R}(T)$, per la (4.11), anche la seconda appartenenza nella (4.6) é soddisfatta.
Se vale la (3.6), cioé

$$f(0) - Lu_0 = M\overline{y}, \quad \overline{y} \in \mathcal{D}(L), \tag{4.12}$$

anche la terza assunzione in (4.6) é verificata. Poiché

$$f(0) - Lu_0 = TL\overline{y} = \tilde{T}(1-P)L\overline{y},$$

la (4.7) diventa

$$(1-P)[f'(0) - L\overline{y}] \in \mathcal{D}_{-\tilde{T}^{-1}}(\beta, +\infty), \tag{4.13}$$

che é ovviamente soddisfatta se

$$f'(0) - L\overline{y} \in \mathcal{R}(T). \tag{4.14}$$

Ricordiamo che $\mathcal{D}_{-\tilde{T}^{-1}}(\beta, +\infty)$ é lo spazio di interpolazione reale

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{-\tilde{T}^{-1}}(\beta, +\infty) &= (X, \mathcal{D}(-\tilde{T}^{-1}))_{\beta,\infty} \\ &= (Y, \mathcal{R}(T))_{\beta,\infty}. \end{aligned} \tag{4.15}$$

Inoltre, sotto la (4.12), (4.9) si riduce alla (2.6).

Pertanto, sotto le assunzioni (1.6), (2.6), (3.5), (4.1), (4.4), (4.8), (4.12), (4.14) (o, piú generalmente, (4.13)) e $f \in C^{1+\beta}([0,\tau];X)$ il problema (3.16)$\sim$(3.18) ha una unica soluzione locale (y,k) su $[0,\tau_1]$ e

$$y \in C^1([0,\tau_1];\mathcal{D}(\tilde{T}^{-1})) \cap C^2((0,\tau_1];Y), \quad t^{1-\alpha}k \in C^\beta([0,\tau_1]).$$

Si noti che (3.16)$\sim$(3.18) é non lineare. Inoltre, $z = y' \in C([0,\tau_1];\mathcal{D}(\tilde{T}^{-1})) \cap C^1((0,\tau_1];Y)$ soddisfa la (3.13) su $(0,\tau_1]$, insieme alle (3.14), (3.15).
Chiaramente, la proprietá di $k(\cdot)$ é connessa col Teorema di esistenza di Pazy [P], Theorem 3.2, p. 111.
Segue che $\tilde{T}^{-1}z = (1-P)w \in C([0,\tau_1];Y)$, $\tilde{T}(1-P)w \in C^1((0,\tau_1];Y)$ risolve il sistema (3.9)$\sim$(3.11) su $(0,\tau_1]$.
D'altro canto, poiché $PL_1u_0 = 0$ in forza della (4.10), la proprietá $t^{1-\alpha}k(\cdot) \in C^\beta([0,\tau_1])$ implica che l'operatore integrale K introdotto nella (3.24) é limitato da $C([0,\tau_1];\mathcal{N}(T))$ in sé ed é contrattivo se τ_1 é sufficientemente piccolo. Cosí la (3.12) ha una unica soluzione locale Pw. Abbiamo cosí provato la seguente affermazione.

Teorema 4.1. *Sia X uno spazio di Banach riflessivo e siano L, L_1, M operatori lineari chiusi in X tali che $\mathcal{D}(L) \subseteq \mathcal{D}(L_1) \cap \mathcal{D}(M)$, $0 \in \rho(L)$ e valgano (1.6), (3.5), (4.1). Siano $\alpha,\beta \in (0,1)$, $\beta \le \min(\alpha, 1-\alpha)$, $f \in C^{1+\beta}([0,\tau];X)$, $g \in C^1([0,\tau]) \cap C^2((0,\tau])$, $t^{1-\alpha}g" \in C^\beta([0,\tau])$, $u_0 \in \mathcal{D}(L)$.*
Siano infine soddisfatte (2.6), (4.11), (4.12), (4.14), con $\Phi[L_1u_0] \neq 0$, dove Φ é un assegnato elemento di X^*.
Allora il problema di identificazione (1.2), (1.4), (1.5) ha una unica soluzione su $[0,\tau_1]$, con $0 < \tau_1 \le \tau$ opportuno, e $u \in C^1((0,\tau_1];\mathcal{D}(L))$, $Mu' \in C^1((0,\tau_1];X)$, $t^{1-\alpha}k \in C^\beta([0,\tau_1])$.

Risultati analoghi sono stati ottenuti negli spazi di funzioni $W^{\theta,p}([0,\tau];X)$, $1/p < \theta < 1$, $p > 1$. (cf. [FL])

Si é anche ottenuto un teorema di esistenza *globale* nel caso di $L_1 = L$ attraverso una analisi dettagliata e raffinata degli operatori non lineari connessi alla soluzione di (1.2), (1.4), (1.5), introducendo opportuni spazi pesati di funzioni hölderiane ed L^p.

5 Applicazioni

Applicazione 1. Sia K un operatore lineare chiuso nello spazio di Banach (complesso) X con inverso limitato, con $-\lambda_1$ autovalore semplice di K, cioé, esiste un $\epsilon > 0$ tale che

$$\|((\lambda+\lambda_1)I + K)^{-1}\| \le C|\lambda|^{-1}, \quad 0 < |\lambda| \le \epsilon.$$

Posti

$$M = \lambda_1 I + K, \quad L = -K, \quad L_1 = \gamma K, \quad \gamma \in R,$$

tutte le assunzioni del Teorema 3.1 sono soddisfatte.
Per esempio, sia Ω un dominio limitato di R^n, $n \ge 1$, con frontiera regolare e si prenda $X = C(\bar{\Omega})$ con la norma del massimo. Definiamo K e Φ mediante

$$\mathcal{D}(K) = \{u \in \bigcap_{p>n} W^{2,p}(\Omega) : \Delta u \in C(\bar{\Omega}), u = 0 \text{ in } \partial\Omega\},$$

$$Ku = \Delta u,$$

$$\Phi[u] = \int_{\Omega} \psi(x)u(x)dx,$$

dove $\psi \in L^1(\Omega)$.
Se $-\lambda_1 < 0$ denota il primo autovalore di Δ, il Teorema 3.1 permette di trattare il problema di identificazione

$$(\lambda_1 I + \Delta)\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = \gamma \int_0^t k(t-s)\Delta u(x,s)ds + f(x,t), \quad (x,t) \in \Omega \times [0,\tau],$$

$$u(x,0) = u_0(x), \quad x \in \Omega,$$

$$u(x,t) = 0, \quad (x,t) \in \partial\Omega \times [0,\tau],$$

$$\int_{\Omega} \psi(x)(\lambda_1 I + \Delta)u(x,t)dx = g(t), \quad t \in [0,\tau],$$

dove $f \in C^1([0,\tau]; C(\bar{\Omega}))$, $g \in C^2([0,\tau])$, $u_0 \in \mathcal{D}(K)$ soddisfano le condizioni stabilite nel teorema sopra richiamato.

Applicazione 2. Sia λ_0 un autovalore del laplaciano con condizioni ai limiti di tipo Dirichlet ; prendiamo

$$K = \Delta, \quad \mathcal{D}(K) = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega), \quad M = \lambda_0 I - K,$$

$$L = a\Delta - b\Delta^2, \quad \mathcal{D}(L) = \mathcal{D}(K^2), \quad L_1 = \Delta^2,$$

$$\Phi[h] = \int_{\Omega} \psi(x)h(x)dx, \quad h \in L^2(\Omega)$$

dove ψ é un fissato elemento di $L^2(\Omega)$. Cosí $\Phi \in X^*$, $X = L^2(\Omega)$.
Applicando i risultati di Favini e Yagi [FY], si vede che tutte le ipotesi sugli operatori del Teorema 4.1 sono soddisfatte, cosicché possiamo trattare equazioni di tipo Sobolev, con $\mathcal{D}(L) \subseteq \mathcal{D}(M)$, $\mathcal{D}(L) \neq \mathcal{D}(M)$. Per le motivazioni, vedi Sviridyuk e Efremov [SE].

Applicazione 3. Sia $X = H^{-1}(\Omega)$, Ω un dominio limitato di R^n con frontiera regolare. Definiamo L, L_1 e M mediante

$$\mathcal{D}(L) = \mathcal{D}(L_1) = H_0^1(\Omega), \quad Lu = L_1 u = -\Delta u, \quad Mu = mu, \quad u \in H_0^1(\Omega)$$

dove m é una funzione in $C(\bar{\Omega}) \geq 0$.

Si vede (cf. Favini e Yagi [FY]) che la proprietá (1.6) é soddisfatta. Possiamo allora applicare il Teorema 4.1 al seguente problema di identificazione :

$$m(x)\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = -\int_0^t k(t-s)\Delta u(x,s)ds + f(x,t), \quad (x,t) \in \Omega \times [0,\tau],$$

$$u(x,0) = u_0(x), \quad x \in \Omega,$$

$$u(x,t) = 0, \quad (x,t) \in \partial\Omega \times [0,\tau],$$

$$\int_\Omega \psi(x)m(x)u(x,t)dx = g(t), \quad 0 \leq t \leq \tau,$$

dove l'ultimo integrale denota la dualitá fra $H^{-1}(\Omega)$ e $H_0^1(\Omega)$. Qui ψ é un fissato elemento di $H_0^1(\Omega)$.

Applicazione 4. Sia Ω un dominio limitato di R^n con frontiera regolare. Siano L, L_1, M gli operatori definiti da

$$\mathcal{D}(L) = H_0^2(\Omega), \quad L_1 u = Lu = \sum_{|\alpha|,|\beta|=2} D^\alpha[a_{\alpha,\beta}D^\beta u] - \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i}(a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}) + a_0 u,$$

$$\mathcal{D}(M) = H_0^1(\Omega), \quad Mu = -\sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i}(m_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}) + m_0 u,$$

dove i coefficienti $a_{\alpha\beta}$, a_{ij}, m_{ij}, a_0, m_0 soddisfano

$$a_{\alpha\beta}, a_{ij}, a_0, m_{ij}, m_0 \in C(\bar{\Omega}), \quad i,j = 1\ldots n, \quad |\alpha|, |\beta| = 2,$$

$$a_{\beta\alpha} = a_{\alpha\beta}, \quad a_{ij} = a_{ji}, \quad m_{ij} = m_{ji}, \quad i,j = 1\ldots n, \quad |\alpha|, |\beta| = 2,$$

$$\sum_{i,j=1}^n m_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq 0, \quad \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq c_0|\xi|^2, \quad \forall x \in \bar{\Omega}, \forall \xi \in R^n,$$

$$\sum_{|\alpha|,|\beta|=2} a_{\alpha\beta}(x)\eta_\alpha\eta_\beta \geq c_0 \sum_{|\alpha|=2} \eta_\alpha^2, \quad \forall x \in \bar{\Omega}, \forall \eta_\alpha \in R,$$

$$a_0(x) \geq 0, \quad m_0(x) \geq 0, \quad \forall x \in \bar{\Omega},$$

dove c_0 é una costante positiva.
Osserviamo che $H_0^2(\Omega)$ con la usuale norma di Sobolev é equivalentemente normato da

$$\|u\|_{H_0^2(\Omega)} = \{\int_\Omega [\sum_{|\alpha|,|\beta|=2} a_{\alpha,\beta}D^\alpha u D^\beta \bar{u} + \sum_{i,j=1}^n a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial \bar{u}}{\partial x_j} + a_0|u|^2]dx\}^{1/2}.$$

Inoltre,

$$(Mu,u)_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega [\sum_{i,j}^{n} m_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial \bar{u}}{\partial x_j} + m_0|u|^2]dx, \quad \forall u \in H_0^1(\Omega).$$

Introducendo le forme sesquilineari

$$l(u,v) = \int_\Omega [\sum_{|\alpha|,|\beta|=2} a_{\alpha\beta} D^\alpha u D^\beta \bar{v} + \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial \bar{v}}{\partial x_j} + a_0 u\bar{v}]dx, \quad u,v \in H_0^2(\Omega),$$

$$m(u,v) = \int_\Omega [\sum_{i,j=1}^{n} m_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial \bar{v}}{\partial x_j} + m_0 u\bar{v}]dx, \quad u,v \in H_0^1(\Omega),$$

$$a_\lambda(u,v) = \lambda m(u,v) + l(u,v), \quad u,v \in H_0^2(\Omega), \quad \lambda \in C,$$

e ragionando come in Favini e Yagi [FY], si vede che $\lambda M + L$ é limitato da $H_0^2(\Omega)$ a $H^{-2}(\Omega)$ e per ogni λ con $\Re e\lambda \geq 0$ si ha che esiste $(\lambda M + L)^{-1}$, con

$$(1+|\lambda|)\|M(\lambda M + L)^{-1} f\|_{H^{-2}(\Omega)} \leq C\|f\|_{H^{-2}(\Omega)},$$

per cui la (1.6) é soddisfatta con $X = H^{-2}(\Omega)$.
Si puó quindi applicare il Teorema 4.1, per esempio, al funzionale Φ del tipo

$$\Phi[u] = \langle u, \psi \rangle_{H^{-2}(\Omega)\times H_0^2(\Omega)}.$$

BIBLIOGRAFIA

[AA] A. Asanov, E. R. Atamanov: Nonclassical and Inverse Problems for Pseudoparabolic Equations, Inverse and Ill Posed Problems Series, VSP (1997).

[FL] A. Favini, A. Lorenzi: *Identification problems for singular integro-differential equations of parabolic type II,* preprint.

[FY] A. Favini and A. Yagi: Degenerate differential equations in Banach spaces, Dekker, New York-Basel-Hong Kong (1999).

[L1] A. Lorenzi: *Un'introduzione ai problemi di identificazione,* Quaderno MA.C.R.O. no. 4/1997, Dipartimento di Matematica "F. Enriques", Universitá di Milano.

[L2] A. Lorenzi: *Pseudoparabolic integro-differential identification problems at resonance in Hilbert spaces,* J. Inverse Ill-Posed Problems, 6 (1998), 485–513.

[LP] A. Lorenzi and E. Paparoni: *Identification problems for pseudoparabolic integro-differential operator equations,* J. Inverse Ill-Posed Problems, 5 (1997), 235–253.

[LS] A. Lorenzi, E. Sinestrari : *An inverse problem in theory of materials with memory,* Nonlin. Anal., Theory, Methods & Appl. 12(1988), 1317–1335.

[P] A. Pazy : Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations, Springer, Berlin, 1983.

[SE] G.A. Sviridyuk, A.A. Efremov : *Optimal control of Sobolev-type linear equations with relatively p-sectorial operators,* Diff. Uravn. 31 (1995), 1912–1919 (in russo) ; trad. ingl. Diff. Eqs. 31 (1995), 1882–1890.